Paskaita 1.

I. Funkcionalo sąvoka. Funkcionalų pavyzdžiai.

Apibrėžimas 1. Kintamąjį dydį v vadiname funkcijos *y(x)* funkcionalu (rašome $v = v[y(x)]$), jei kiekvienai tam tikros klasės funkcijai *y(x)* (jas vadinsime leistinomis) priskiriamas skaičius v. Funkcija *y(x)*, šiuo atveju, yra nepriklausomas kintamasis. Funkcionalai gali priklausyti ir nuo daugelio kintamųjų. Sakysime, kad turime funkcionalą, jei kurios nors aibės objektui (pvz. kreivių aibėje – kreivei, paviršių aibėje – paviršiui ir t.t.) priskiriamas skaičius (paprastai tam tikra objekto charakteristika). Pateiksime funkcionalų pavyzdžių:

1. Matematinėje analizėje plokščiosios kreivės ilgiu vadinama laužčių, kurių viršūnės yra kreivėje, ilgių riba, kai kiekvienos, ją sudarančios atkarpos ilgis artėja į nulį. Jei egzistuoja tokia baigtinė riba, tai kreivė vadinama ištiesinama. Kreivių, jungiančių taškus (x_0, y_0) ir (x_1, y_1) ilgiai sudaro funkcionalą, apibrėžtą ištiesinamų kreivių aibėje. Jei kiekviena šios aibės kreivė apibrėžiama tam tikra funkcija *y(x)*, tai jos ilgis intervale (x_0, y_0) yra funkcionalas

$$L[y] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx .$$

2. Kiekvienai ištiesinamai plokščiajai kreivei (nagrinėjamai, kaip materialioji linija) priskirkime svorio centro ordinatę. Ta ordinatė yra duotosios kreivės funkcionalas.

3. Plokštumoje nagrinėkime visus įmanomus kelius, jungiančius du duotuosius taškus *A* ir *B*. Tegul kūnas gali judėti iš taško *A* į *B* bet kuriuo iš šių kelių, kiekviename taške (x,y) turėdamas greitį v(x,y). Mes gausime funkcionalą, jei kiekvienam keliui priskirsime laiką per kurį kūnas iš taško *A* pasiekia tašką *B*.

4. Integralas

$$v[y] = \int_a^b y(x)dx ,$$

yra funkcionalas, apibrėžtas tolydžiųjų intervale $[a,b]$ funkcijų $y = y(x)$ aibėje.

5. Tegul $v[y] = y'(x_0)$ ir $x_0 \in (a,b)$. Tada $v[y]$ yra funkcionalas, apibrėžtas diferencijuojamų intervale (a,b) funkcijų $y = y(x)$ aibėje.

6. Turime $v[y] = c_1 y''(x_0) + c_2 y'(x_0) + c_3 y(x_0)$, kur $x_0 \in (a,b)$, o $c_1, c_2, c_3 -$ bet kurie fiksuoti skaičiai. Tada $v[y]$ yra funkcionalas, apibrėžtas du kartus diferencijuojamų intervale (a,b) funkcijų $y = y(x)$ aibėje.

7. Paviršiaus plotas taip pat yra funkcionalas, apibrėžtas tam tikroje paviršių (užduotų funkcijomis $z = z(x, y)$) aibėje. Kaip žinoma

$$S[z(x,y)] = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy .$$

8. Tam tikros homogeninės kreivės ar paviršiaus inercijos momentai taško, ašies arba plokštumos atžvilgiu yra funkcionalai.

9. Pasipriešinimas, kurį patiria tam tikrojo aplinkoje duotuoju greičiu judantis kūnas, irgi yra funkcionalas, nes pasipriešinimą sąlygoja kūno forma (t.y. funkcija, apibrėžiančia šio kūno formą).

Pavyzdžių sąrašą galime tęsti.

Variacinis skaičiavimas nagrinėja metodus, leidžiančius surasti maksimalią bei minimalią funkcionalo reikšmę. Uždaviniai, kuriuose randami funkcionalų maksimumai bei minimumai vadinami variaciniais.

II. Trys klasikiniai variacinio skaičiavimo (variaciniai) uždaviniai.

1696 m. Johanas Bernulis paskelbė laišką, kuriame jis matematikams pasiūlė išspręsti greičiausio nusileidimo kreivės uždavinį. (Šią liniją jis pavadino brachistochrona).

1. Brachistochronos uždavinys

Skirtinguose aukščiuose duoti du taškai. Juos jungia materiali linija. Iš aukščiau esančiojo taško materialusis taškas nusirita šia linija į žemiau esantį tašką. Reikia surasti tokią nusileidimo kreivę, kad materialusis taškas iš pirmojo į antrąjį patektų per trumpiausią laiką. Uždavinį išsprendė Johanas ir Jakobas Bernuliai, Niutonas, Liopitalis. Paaiškėjo, kad kreivė – cikloidės dalis.

2. Geodezinės kreivės uždavinys

Tarp dviejų duotojo paviršiaus taškų reikia rasti liniją, turinčią mažiausią ilgį. Tokio tipo linijos vadinamos geodezinėmis. Šį variacinį sąlyginį uždavinį išsprendė J. Bernulis.

3. Izoparametrinis uždavinys

Reikia rasti duotojo ilgio kreivę L, ribojančią didžiausią plotą S.

Manoma, kad šiuo uždaviniu prasidėjo klasikinio variacinio skaičiavimo istorija. Uždavinyje reikalaujama rasti funkcionalo S ekstremumą, kai duota papildoma sąlyga: kreivės ilgis pastovus. Papildoma sąlyga yra ta, kad funkcionalo reikšmė L

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt .$$

yra pastovi. Tokio tipo sąlygos vadinamos izoparametrinėmis.

Pirmieji bendri variacinių uždavinių sprendimo būdai randami L. Oilerio, J. Bernuli, Ž. Lagranžo darbuose. Vėliau buvo pasiūlyta daug naujų sprendimo būdų. Juos pasitelkus išspręsti įvairūs mechanikos, fizikos ir kitų mokslų uždaviniai.

III. Ekstremumo sąvoka matematinėje analizėje

Prisiminkime keletą matematinės analizės sąvokų. Jos yra analogiškos vėliau formuluotoms funkcionalų sąvokoms. Nagrinėsime argumento bei funkcijos pokyčius ir suformuluosime būtinąją ekstremumo egzistavimo sąlygą. Kintamąjį y vadinsime funkcija nuo kintamojo x (žymėsime $y = f(x)$), jeigu kiekvienai tam tikros aibės kintamojo x reikšmei apibrėžta vienintelė kintamojo y reikšmė. Dydis x vadinamas nepriklausomu kintamuoju arba argumentu. Argumento x pokyčiu Δx vadinsime skirtumą $\Delta x = x - x_1$. Nepriklausomo kintamojo diferencialas sutampa su jo pokyčiu, t.y jei x – nepriklausomas, $dx = \Delta x$.

Funkcija vadinama tolydžia taške x_0, jeigu ji apibrėžta šiame taške ir kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks $\delta > 0$, kad su visais x, tenkinančiais sąlygą $|x - x_0| < \delta$ teisinga nelygybė $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Tiesine vadinama funkcija tenkinančia sąlyga

$$f(c_1 x_1 + c_2 x_2) = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2).$$

Jei funkcijos $f(x)$ pokytį $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ galime išreikšti pavidalu

$$\Delta f = A(x)\Delta x + \beta(x, \Delta x)\Delta x,$$

kur $A(x)$ nepriklauso nuo Δx, o $\beta(x, \Delta x) \to 0$, kai $\Delta x \to 0$, tai funkcija $f(x)$ vadinama diferencijuojama, o tiesinė pokyčio atžvilgiu Δx dalis $A(x)\Delta x$ vadinama funkcijos $f(x)$ diferencialu ir žymima df. Padalįję turėtą lygybę iš Δx ir perėję prie ribos, kai $\Delta x \to 0$, gauname, kad $A(x) = f'(x)$. Iš to gauname lygybė $df = f'(x)\ \Delta x$ arba $df = f'(x)dx$. Matome, kad funkcijos diferencialas yra pagrindinė tiesinė pokyčio dalis. Suformuluokime būtiną ekstremumo egzistavimo sąlygą.

Teorema. *Jei diferencijuojama funkcija vidiniame apibrėžimo srities taške* x_0 *turi ekstremumą, tai* $df = 0$.